
INTERROGATION N°5 — SUITES (SUJET A)

NOM : Prénom : Note :

1) Soit (u_n) une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. Donner la définition de $u_n \rightarrow \ell$ en termes de quantificateurs.

Cf cours.

2) Donner la définition de suites adjacentes ainsi que le théorème de convergence associé.

Cf cours.

3) Déterminer la monotonie puis la nature de la suite $u_n = \frac{n!}{n^n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $u_n > 0$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)n!}{(n+1)^{n+1}n!} n^n = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n < 1 \quad \text{car } \frac{n}{n+1} < 1$$

Ainsi, (u_n) est strictement décroissante. De plus, (u_n) est minorée par 0 donc elle est convergente.

4) Déterminer le terme général de la suite (u_n) définie par
$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} & u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \\ u_0 = 1 = u_1 \end{cases}$$

L'équation caractéristique est $r^2 = 2r + 1$, c'est-à-dire $(r - 1)^2 = 0$. Elle admet donc 1 pour racine double, si bien que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n = (A + Bn)1^n = A + Bn$$

Or, $u_0 = 1 = A$ et $u_1 = 1 = A + B$, d'où $B = 1 - A = 0$. Finalement, (pour tout $n \in \mathbb{N}$) $u_n = 1$.

INTERROGATION N°5 — SUITES (SUJET B)

NOM : Prénom : Note :

1) Soit (u_n) une suite réelle. Donner la définition de $u_n \rightarrow +\infty$ en termes de quantificateurs.

Cf cours.

2) Énoncer le théorème de la limite monotone pour une suite croissante.

Cf cours.

3) Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = (n^{\ln n})^{\frac{1}{n}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $u_n = (n^{\ln n})^{\frac{1}{n}} = (e^{\ln n \times \ln n})^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}(\ln n)^2}$. Or,

$$\frac{1}{n}(\ln n)^2 \rightarrow 0 \quad \text{par croissances comparées}$$

Et comme $e^x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$, par composition $u_n \rightarrow 1$.

4) On définit la suite (S_n) par $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont convergentes.

Cf la correction (faite en classe) de l'exercice 20 du TD 11-12.